BOOK में परिवर्तन

ध्यान दे –नये सत्र 2023 से बुक में परिवर्तन किये गए है उसे फ्री में डाउनलोड करे निचे लिंक दिया गया है

इस pdf फाइल में पुराने बुक का भी हल है , जो प्रश्नावली व प्रश्न कट गये है उसका लिस्ट निचे दिया गया है

आपसे निवेदन है **पुराना प्रश्न न पढ़े** , केवल नये किताब के प्रश्न पढ़े

विडियो से समझे क्या परिवर्तन हुआ है

Play

ध्यान दे :- अध्याय -1 में परिवर्तन

Old Book	New Book
प्रश्नावली -1.1	✓ प्रश्नावली -1.1
प्रश्नावली -1.2	✓ प्रश्नावली -1.2
प्रश्नावली -1.3	✗
प्रश्नावली -1.4	✗
विविध प्रश्नावली प्रश्न - 1,2,3,6,7,9,11, 12,13,14,18,19 ख़त्म	अब – प्रश्न 4,5,8,10,15,16,17 बचे है

नये सत्र का किताब डाउनलोड करे -

DOWNLOAD NEW BOOK

अध्याय 1

संबंध एवं फलन

Relations and Functions

प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक हैं

(i) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, \ldots, 13, 14\}$ में संबंध R, इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में, $R = \{(x, y) : y = x + 5$ तथा $x < 4\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R

(iii) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में, $R = \{(x, y) : y$ भाज्य है x से$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है।

(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय Z में, $R = \{(x, y) : x - y$ एक पूर्णांक है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R

(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध R

(a) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं$\}$

(b) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

(c) $R = \{(x, y) : x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा है$\}$

(d) $R = \{(x, y) : x, y$ की पत्नी है$\}$

(e) $R = \{(x, y) : x, y$ के पिता हैं$\}$

हल (i) (a) दिया है, $\quad A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 12, 13, 14\}$

तथा $\quad R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए $(x, x) \in A, \forall x \in A$

$\therefore$ यदि $y = x$ हो, तो $3x - y = 0$

$\Rightarrow \quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow (x, x) \notin R, \forall x \in A$, इसलिए R स्वतुल्य संबंध नहीं है।

(b) सममित संबंध के लिए,

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

$\therefore$ यदि $(x, y) \in R \Rightarrow 3x - y = 0$

तब, $3y - x \neq 0 \Rightarrow (y, x) \notin R$

अतः R सममित संबंध नहीं है।

जैसे—यदि $x = 1, y = 3$, तो $3 \times 1 - 3 = 0$

$3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8 \neq 0$

(c) संक्रमक संबंध के लिए, यदि

$$(x, y) \in R \Rightarrow 3x - y = 0$$
$$(y, z) \in R \Rightarrow 3y - z = 0$$

तब, $3x - z \neq 0$ अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

जैसे— यदि $x = 1, y = 3, z = 9$, तो $3 \times 1 - 3 = 0, 3 \times 3 - 9 = 0, 3 \times 1 - 9 \neq 0$

(ii) दिया है, $A = N =$ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

तथा $R = \{(x, y) : y = x + 5$ तथा $x < 4\}$

$= \{(x, x + 5) : x \in N$ तथा $x < 4\}$

$= \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

(a) स्वतुल्य संबंध के लिए, $y = x$ रखने पर, $x \neq y + 5$

$\Rightarrow (1, 1) \notin R$ अतः R स्वतुल्य संबंध नहीं है।

(b) सममित संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R$

$\Rightarrow \quad y = x + 5$

$\Rightarrow \quad x = y - 5$

$\Rightarrow \quad x \neq y + 5 \Rightarrow (y, x) \notin R$

जैसे— $(1, 6) \in R$ लेकिन $(6, 1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

(c) संक्रमक संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R, (y, z) \in R$

$\Rightarrow \quad y = x + 5 \quad \ldots$(i)

तथा $\quad z = y + 5 \quad \ldots$ (ii)

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$z + y = x + 5 + y + 5$$

$\Rightarrow \quad z = x + 10$

$\Rightarrow \quad z \neq x + 5 \Rightarrow (x, z) \notin R$

जैसे— $(2, 7), (3, 8) \in R$ लेकिन $(2, 8) \in R$ अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

(iii) दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तथा $R = \{(x, y) : y$ भाज्य है x से$\}$

(a) समतुल्य संबंध के लिए, चूँकि हम जानते हैं प्रत्येक $x \in A$, x से भाज्य है।

अतः $(x, x) \in R, \forall x \in A$ इसलिए R एक स्वतुल्य संबंध है।

(b) सममित संबंध के लिए, चूँकि 6, 2 से भाज्य है।

$\therefore \quad (2, 6) \in R$, लेकिन 2, 6 से भाज्य नहीं है।

$\therefore \quad (6, 2) \notin R$ अतः R एक सममित संबंध नहीं है।

(c) संक्रमक संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow$ y, x से भाज्य है तथा z, y से भाज्य है।

$\Rightarrow$ z, x से भाज्य है।

जैसे– 2, 1 से भाज्य है तथा 4, 2 से भाज्य है।

$\Rightarrow$ 4, 1 से भाज्य है। $\Rightarrow (x, z) \in R$

$\Rightarrow R$ एक संक्रमक संबंध है।

(iv) दिया है,

$A = Z =$ समस्त पूर्णांकों का समुच्चय तथा $R = \{(x, y) : x - y$ एक पूर्णांक है$\}$

(a) स्वतुल्य संबंध के लिए,

चूँकि $x - x = 0$, जोकि एक पूर्णांक है। अतः $(x, x) \in R, \forall x \in A$

(b) सममित संबंध के लिए, मान लीजिए

$(x, y) \in R \Rightarrow x - y$ एक पूर्णांक है।

जैसे– $x - y = \lambda$, जहाँ λ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $y - x = -\lambda \Rightarrow y - x$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $(y, x) \in R$ अतः R एक सममित संबंध है।

(c) संक्रमक संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow$ $x - y$ एक पूर्णांक है तथा $y - z$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $x - z$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $(x, z) \in R$

अतः R एक संक्रमक संबंध है।

(v) दिया है, $A =$ किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों का समुच्चय

(a) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही स्थान$\}$ पर कार्य करते हैं।

स्पष्ट है कि R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक है।

(b) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

स्पष्ट है कि R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक संबंध है।

(c) $R = \{(x, y) : x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा है$\}$

चूँकि x, x से 7 सेमी लम्बा नहीं हो सकता है। अतः R स्वतुल्य संबंध नहीं है।

अब, मान लीजिए $(x, y) \in R$

$\Rightarrow$ x, y से ठीक - ठीक 7 सेमी लम्बा है।

$\Rightarrow$ y, x से 7 सेमी लम्बा नहीं हो सकता है।

$\Rightarrow$ $(y, x) \notin R$

अतः R सममित संबंध नहीं है।

अब, मान लीजिए $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा है तथा y, z से ठीक - ठीक 7 सेमी लम्बा है।

$\Rightarrow x, z$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा नहीं हो सकता है।

$\Rightarrow$ $(x, z) \notin R$ अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

(d) $R = \{(x, y) : x, y$ की पत्नी है$\}$

चूँकि x, x की पत्नी नहीं हो सकती है। अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

अब, मान लीजिए $(x, y) \in R \Rightarrow x, y$ की पत्नी है।
$\Rightarrow y, x$ की पत्नी नहीं हो सकती है।
$\Rightarrow$ $(y, x) \notin R$ अतः R, सममित संबंध नहीं है।
पुनः मान लीजिए
$(x, y) \in R \Rightarrow (y, z) \notin R$ क्योंकि x, y की पत्नी है, तो y पुरुष होगा।
इसलिए वह किसी की पत्नी नहीं हो सकती है। अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है।

(e) $R = \{(x, y) : x, y$ के पिता हैं$\}$
चूँकि x, x का पिता नहीं हो सकता है।
$\therefore R$ स्वतुल्य संबंध नहीं है।
अब, मान लीजिए $(x, y) \in R \Rightarrow x, y$ के पिता हैं।
$\Rightarrow y, x$ के पिता नहीं हो सकते हैं।
$\Rightarrow (y, x) \notin R$
$\Rightarrow R$, सममित संबंध नहीं है।
अब, यदि $(x, y) \in R$, तो x, y के पिता हैं तथा $(y, z) \in R$, तो y, z के पिता हैं।
लेकिन अब x, z के पिता नहीं हो सकते हैं। अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रमक है।

हल दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

तथा $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ सत्य नहीं है।

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$ अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

सममित संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $-1 \leq 3^2 \Rightarrow (-1, 3) \in R$ लेकिन $3 \nleq (-1)^2$
$\Rightarrow (3, -1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।
संक्रमक संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $2 \nless (-3)^2 \therefore (2, -3) \in R$ तथा $(-3) \leq (1)^2$
$\therefore (-3, 1) \in R$ लेकिन $2 \nleq 1^2 \therefore (2, 1) \notin R$ अतः R एक संक्रमक संबंध नहीं है।

प्रश्न 3. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में, $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य, सममित या संक्रमक है?

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तथा $R = \{(a, b) : b = a + 1\} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

अब, चूँकि $6 \in A$ लेकिन $(6, 6) \notin R$ अतः R स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, $(1, 2) \in R$ लेकिन $(2, 1) \notin R$। अतः R सममित संबंध नहीं है, पुनः $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 3) \in R$ लेकिन $(1, 3) \notin R$, अतः R संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, स्वतुल्य संबंध, सममित संबंध तथा संक्रमक संबंध में से कोई नहीं है।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि R में $R = \{(a, b) : a \le b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रमक है किंतु सममित नहीं है।

हल दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा $R = \{(a, b) : a \le b\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, चूँकि प्रत्येक वास्तविक संख्या अपने से छोटी या अपने बराबर हो सकती है।

$\therefore$ $(x, x) \in R, \forall x \in A$ अतः R, स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध के लिए, चूँकि 2, 3 से छोटी वास्तविक संख्या है।

$\therefore$ $(2, 3) \in R$ लेकिन 3, 2 से छोटी वास्तविक संख्या नहीं है।

$(3, 2) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, मान लीजिए $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$

$\Rightarrow$ $a \le b$ तथा $b \le c$

$\Rightarrow$ $a \le c \Rightarrow (a, c) \in R$ अतः R संक्रमक संबंध है।

इसलिए, R, स्वतुल्य तथा संक्रमक संबंध है लेकिन सममित संबंध नही है।

प्रश्न 5. जाँच कीजिए कि क्या R में, $R = \{(a, b) : a \le b^3\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रमक है?

हल दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा $R = \{(a, b) : a \le b^3\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $\frac{1}{2} \not\le \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$, अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

सममित संबंध के लिए, चूँकि $1 < 2^3 \therefore (1, 2) \in R$ लेकिन $2 \not< 1^3 \therefore (2, 1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, चूँकि $3 < \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \therefore \left(3, \frac{3}{2}\right) \in R$ तथा $\frac{3}{2} < \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125}$

$\therefore$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right) \in R$ लेकिन $3 > \left(\frac{6}{5}\right)^3$

$\therefore \left(3, \frac{6}{5}\right) \notin R$ अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, स्वतुल्य संबंध, सममित संबंध तथा संक्रमक संबंध में से कोई नहीं है।

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में, $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किंतु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रमक है।

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3\}$

तथा $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$,

चूँकि $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \notin R$, $\therefore R$, स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, चूँकि $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 1) \in R$ $\therefore R$ सममित संबंध है। पुनः $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 1) \in R$ लेकिन $(1, 1) \notin R$ अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, सममित संबंध है लेकिन R, स्वतुल्य संबंध तथा संक्रमक संबंध नहीं है।

प्रश्न 7. **सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।**

हल दिया है, $A =$ किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों का समुच्चय तथा $R = \{(x, y) : x$ तथा Y में पेजों की संख्या समान है$\}$

यहाँ, $(x, x) \in R, \forall x \in A$ क्योंकि पुस्तक x में पेजों की संख्या पुस्तक x के ही पेजों की संख्या के बराबर होगी। $\therefore R$, स्वतुल्य संबंध है। अब, मान लीजिए $(x, y) \in R \Rightarrow$ पुस्तक x तथा y में पेजों की संख्या समान है। $\Rightarrow$ पुस्तक y तथा x में पेजों की संख्या समान होगी। $\Rightarrow (y, x) \in R \therefore R$ एक सममित संबंध है।

पुनः मान लीजिए $(x, y) \in R$

$\Rightarrow$ पुस्तक x तथा पुस्तक y में पेजों की संख्या समान है तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow$ पुस्तक y तथा पुस्तक z में पेजों की संख्या समान है। अतः पुस्तक x तथा z में पेजों की संख्या समान होगी।

$\Rightarrow \quad (x, z) \in R$

अतः R, एक संक्रमक संबंध है।

इसलिए R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

प्रश्न 8. **सिद्ध कीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ में, $R = \{(a, b) : |a - b|$ सम है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव एक-दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव एक-दूसरे से संबंधित हैं परंतु $\{1, 3, 5\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4\}$ के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।**

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $R = \{(a, b) : |a - b|$ सम है$\}$

चूँकि सभी $a \in A$ के लिए, $|a - a| = 0$, जोकि सम है।

$\therefore \quad (a, a) \in R, \forall a \in A \quad \therefore R$, स्वतुल्य संबंध है।

अब, मान लीजिए $(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$ सम है।

$\Rightarrow \quad |-(b - a)|$ सम है।

$\Rightarrow \quad |b - a|$ सम है।

$\Rightarrow \quad (b, a) \in R, \forall a, b \in A \therefore R$, सममित संबंध है।

पुनः मान लीजिए $\quad (a, b) \in R$

$\Rightarrow \quad |a - b|$ सम है।

$\Rightarrow \quad (a - b)$ सम है।

तथा $\quad (b, c) \in R$

$\Rightarrow \quad |b - c|$ सम है। $\Rightarrow (b - c)$ सम है।

$\therefore \quad (a - b) + (b - c)$ सम है।

$\Rightarrow \quad (a - c)$ सम है। $\Rightarrow |a - c|$ सम है।

$\Rightarrow \quad (a, c) \in R \quad \therefore R$, संक्रमक संबंध है।

अतः R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक संबंध है। इसलिए R, तुल्यता संबंध है। अब, चूँकि समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव विषम हैं। अतः समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के किन्हीं दो अवयवों के अन्तर का मापांक सम होगा। इसलिए समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव संबंध R द्वारा एक-दूसरे से संबंधित है।

इसी प्रकार, चूँकि समुच्चय $\{2,4\}$ के सभी अवयव सम हैं। अतः समुच्चय $\{2,4\}$ के किन्हीं दो अवयवों के अन्तर का मापांक सम होगा। इसलिए समुच्चय $\{2,4\}$ के सभी अवयव संबंध R द्वारा एक-दूसरे से संबंधित है।

पुनः चूँकि समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव विषम हैं तथा समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव सम हैं। अतः समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के किसी अवयव तथा समुच्चय $\{2, 4\}$ के किसी एक अवयव के अन्तर का मापांक विषम होगा। इसलिए समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ का कोई अवयव,समुच्चय $\{2, 4\}$ के किसी अवयव से, संबंध R द्वारा संबंधित नहीं है।

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है}

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A = \{x \in Z : 0 \leq x < 12\}$

$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है}

चूँकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $|a - a| = 0$, जोकि 4 का गुणज है। अतः R स्वतुल्य संबंध है। अब, मान लीजिए

$(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$, 4 का गुणज है।

$\Rightarrow$ $|-(b - a)|$, 4 का गुणज है।

$\Rightarrow$ $|b - a|$, 4 का गुणज है।

$\Rightarrow$ $(b, a) \in R, \forall a, b \in R$

अतः R सममित संबंध है। अब, मान लीजिए $(a, b), (b, c) \in R$, तब $|a - c|$ तथा $|b - c|$ 4 के गुणज हैं। $|a - c|$, 4 का गुणज है। $\therefore (a, c) \in R$

$\therefore$ R, संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

अब चूँकि $|1 - 1| = 0$, जोकि 4 का गुणज है।

$|5 - 1| = 4$, जोकि 4 का गुणज है।

$|9 - 1| = 8$, जोकि 4 का गुणज है।

$\therefore$ 1 से संबंधित अवयव 1, 5, 9 हैं।

$\therefore$ $[1] = \{1, 5, 9\}$

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

चूँकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $a = a$ है। अतः $(a, a) \in R, \forall a \in A$ $\therefore$ A स्वतुल्य संबंध है।

अब, मान लीजिए $(a, b) \in R \Rightarrow a = b \Rightarrow b = a \Rightarrow (b, a) \in R$, अतः R सममित संबंध है।

पुनः मान लीजिए

$$(a, b), (b, c) \in R$$
$$\Rightarrow \quad a = b \text{ तथा } b = c$$
$$\Rightarrow \quad a = c$$
$$\Rightarrow \quad (a, c) \in R$$

अतः R, एक संक्रमक संबंध है। इसलिए R, एक तुल्यता संबंध है।

अब, चूँकि $1 = 1$, इसलिए R द्वारा 1 से संबंधित अवयव केवल 1 है। अतः $[1] = 1$

प्रश्न 10. ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो

(i) सममित हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रमक हो।

(ii) संक्रमक हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो किंतु संक्रमक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रमक हो किंतु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रमक हो किंतु स्वतुल्य न हो।

हल

(i) मान लीजिए समुच्चय $A = \{5, 6, 7\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(5, 6), (6, 5)\}$ है। चूँकि $(5, 5)\,(6, 6)\,(7, 7) \notin R$ अतः R स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, चूँकि $(5, 6) \in R$ तथा $(6, 5) \in R$ अतः R, सममित संबंध है।

पुनः $(5, 6) \in R, (6, 5) \in R$ लेकिन $(5, 5) \notin R$ अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

अतः समुच्चय $A = \{5, 6, 7\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(5, 6), (6, 5)\}$, सममित संबंध है। लेकिन न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रमक संबंध है।

(ii) मान लीजिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध $R = \{(a, b) : a < b\}$ है।

यहाँ प्रत्येक $a \in R$ के लिए $(a, a) \notin R$ क्योंकि कोई भी वास्तविक संख्या अपने से छोटी नहीं हो सकती है। अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, $(1, 2) \in R$ क्योंकि $1 < 2$ लेकिन $(2, 1) \notin R$ क्योंकि $2 \not< 1$ अतः R सममित संबंध नहीं है। पुनः मान लीजिए $(a, b), (b, c) \in R$, तब $a < b$ तथा $b < c$

$\Rightarrow \quad a < c$

$\Rightarrow \quad (a, c) \in R$

अतः R, एक संक्रमक संबंध है। इसलिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध R एक संक्रमक संबंध है। लेकिन R न तो स्वतुल्य है और न ही सममित संबंध है।

(iii) मान लीजिए समुच्चय $A = \{4, 6, 8\}$ पर परिभाषित संबंध

$$R = \{(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 6), (6, 4), (6, 8), (8, 6)\}$$

है। चूँकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a, a) \in R$ अतः R एक स्वतुल्य संबंध है। पुनः प्रत्येक $(a, b) \in R$ के लिए $(b, a) \in R$ है। अतः R एक सममित संबंध है। अब, चूँकि $(4, 6), (6, 8) \in R$ लेकिन $(4, 8) \notin R$ अतः R, एक संक्रमक संबंध नहीं है।

इसलिए समुच्चय $A = \{4, 6, 8\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(4, 4), (6, 6), (8, 8)\,(4, 6), (6, 4), (6, 8), (8, 6)\}$, स्वतुल्य, सममित संबंध है। लेकिन संक्रमक नहीं है।

(iv) मान लीजिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध $R = \{(a, b) : a^3 \geq b^3\}$ है, तब चूँकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a, a) \in R$ है क्योंकि $a^3 \geq b^3$ प्रत्येक $a \in R$ अतः R एक स्वतुल्य संबंध है। अब, $(2, 1) \in R$ क्योंकि $2^3 > 1^3$, अर्थात् $8 > 1$ लेकिन $(1, 2) \notin R$ क्योंकि $1^3 \not> 2^3$ अर्थात् $1 \not> 8$ अतः R, सममित संबंध नहीं है।

पुनः मान लीजिए

$$(a, b), (b, c) \in R$$

$\Rightarrow \quad a^3 \geq b^3$ तथा $b^3 \geq c^3$

$\Rightarrow \quad a^3 \geq c^3$

$\Rightarrow \qquad (a, c) \in R$

अतः R, संक्रमक संबंध है।

इन वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध $R = \{(a, b) : a^3 \geq b^3\}$ स्वतुल्य, संक्रमक संबंध है लेकिन सममित संबंध नहीं है।

(v) मान लीजिए समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(1, 1), (2, 2); (1, 2), (2, 1)\}$ है। चूँकि $(3, 3) \notin R$, अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है। चूँकि $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 1) \in R$ अतः R, सममित संबंध है। पुनः $(1, 2), (2, 1) \in R$

$\Rightarrow (1, 1) \in R$, उसी प्रकार $(2, 1), (1, 2) \in R \Rightarrow (2, 2) \in R$ अतः R संक्रमक संबंध है।

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में, $R = \{(P, Q) :$ बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। पुनः सिद्ध कीजिए कि बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

हल दिया है,

$R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के समान है$\}$

चूँकि किसी बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिन्दु P की मूलबिंदु से दूरी के बराबर होती है। अतः $(P, P) \in R, \forall P \in A$. अतः R, स्वतुल्य संबंध है। अब मान लीजिए $(P, Q) \in R$

$\Rightarrow$ बिन्दु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow$ बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow \qquad (Q, P) \in R, \forall P, Q \in A$ अतः R, एक सममित संबंध है।

पुनः मान लीजिए

$$(P, Q), (Q, S) \in P$$

$\Rightarrow$ बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है तथा बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु S की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow$ बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु S की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow \qquad (P, S) \in R$

अतः R एक संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है। अब, बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित वह बिंदु हो, जिनकी मूलबिंदु से दूरी, बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है अर्थात् यदि $O(0, 0)$ मूलबिंदु है तथा $OP = k$, जहाँ k एक अचर है, तब बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित बिंदु, मूलबिंदु से अचर k दूरी पर होंगे। अतः बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित बिंदुओं का समुच्चय एक वृत्त है जिसका केन्द्र मूलबिंदु तथा यह वृत्त बिंदु P से होकर जाता है।

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज T_1, भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज T_2 तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज T_3 पर विचार कीजिए। T_1, T_2 और T_3 में से कौन-से त्रिभुज परस्पर संबंधित हैं?

हल दिया है, A = समस्त त्रिभुजों का समुच्चय, $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$

चूँकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समरूप होता है। अतः R स्वतुल्य संबंध है। पुनः मान लीजिए $(T_1, T_2) \in R$

$\Rightarrow \qquad T_1, T_2$ समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow$ T_2, T_1 समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow$ $(T_2, T_1) \in R, \forall T_1, T_2 \in A$

$\Rightarrow$ R, एक सममित संबंध है। पुन: मान लीजिए $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow$ T_1, T_2 समरूप त्रिभुज हैं तथा T_2, T_3 समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow$ T_1, T_3 समरूप त्रिभुज है।

$\Rightarrow$ $(T_1, T_3) \in R, \forall T_1, T_3 \in A$

$\Rightarrow$ R, एक संक्रमक संबंध है।

इसलिए R एक तुल्यता संबंध है। अब, चूँकि $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)$

अत: त्रिभुजों T_1 तथा T_3 की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं। अत: त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_3 के समरूप है। अत: त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_3 से संबंधित है।

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान हैं$\}$ प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 3, 4 और 5 लम्बाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A =$ समस्त बहुभुजों का समुच्चय

तथा $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान हैं$\}$

स्पष्ट है कि $(P, P) \in R, \forall P \in A$ क्योंकि प्रत्येक बहुभुज P में भुजाओं की संख्या, बहुभुज P की भुजाओं की संख्या के बराबर है। अत: R, स्वतुल्य संबंध है।

अब, मान लीजिए $(P_1, P_2) \in R \Rightarrow$ बहुभुज P_1 तथा P_2 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ बहुभुज P_2 तथा P_1 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ $(P_2, P_1) \in R$

$\Rightarrow$ R, एक सममित संबंध है। पुन: मान लीजिए $(P_1, P_2), (P_2, P_3) \in R$

$\Rightarrow$ बहुभुज P_1 तथा P_2 में भुजाओं की संख्या समान हैं। P_2 तथा P_3 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ P_1 तथा P_3 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ $(P_1, P_3) \in R$

$\Rightarrow$ R, एक संक्रमक संबंध है। अत: R, एक तुल्यता संबंध है।

अब, भुजाओं 3, 4 तथा 5 वाले समकोण त्रिभुज से वह बहुभुज संबंधित होगा। जिसमें भुजाओं की संख्या तीन होगी। अत: भुजाओं 3, 4 तथा 5 वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित बहुभुज, त्रिभुज है।

प्रश्न 14. मान लीजिए कि XY-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में, $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ समान्तर है L_2 के$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A = XY$-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है।

तथा $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ समान्तर है L_2 के$\}$

चूँकि प्रत्येक रेखा अपने के समान्तर होती है। अत: प्रत्येक $L \in A$ के लिए $(L, L) \in R$ अत: R, एक स्वतुल्य संबंध है।

पुनः मान लीजिए $\quad (L_1, L_2) \in R, \forall L_1, L_2 \in A$

$\Rightarrow \quad L_1, L_2$ समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow \quad L_2, L_1$ समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow \quad (L_2, L_1) \in R, \forall L_1, L_2 \in A$

अतः R, एक सममित संबंध है। पुनः मान लीजिए $(L_1, L_2), (L_2, L_3) \in R$

$\Rightarrow \quad L_1, L_2$ समान्तर रेखाएँ हैं तथा L_2, L_3 समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow \quad L_1$ तथा L_3 समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow \quad (L_1, L_3) \in R, \forall L_1, L_2, L_3 \in R$

$\Rightarrow \quad R$, एक संक्रमक संबंध है। इसलिए R, एक तुल्यता संबंध है।

अब, रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित रेखाओं के समुच्चय में वह रेखाएँ होंगी, जो $y = 2x + 4$ के समान्तर होंगी। लेकिन रेखा $y = 2x + 4$ की प्रवणता 2 है। अतः रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित रेखाएँ $y = 2x + c$ के रूप की होगी जहाँ c एक अचर है।

प्रश्न 15. मान लीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में,

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$$

द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।

(a) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रमक नहीं है।

(b) R स्वतुल्य तथा संक्रमक है किंतु सममित नहीं है।

(c) R सममित तथा संक्रमक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

(d) R एक तुल्यता संबंध है।

हल (b) दिया है, $\quad A = \{1, 2, 3, 4\}$

तथा $\quad R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$

चूँकि $\quad (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R,$

अतः $\quad (a, a) \in R, \forall a \in A$

अतः R एक स्वतुल्य संबंध है।

अब, $(1, 2) \in R$ लेकिन $(2, 1) \notin R$ अतः R, एक सममित संबंध नहीं है।

पुनः यदि $\quad (a, b), (b, c) \in R$

$\Rightarrow \quad (a, c) \in R, \forall a \in A$

$\Rightarrow R$ संक्रमक संबंध है। अतः R, स्वतुल्य तथा संक्रमक संबंध है लेकिन सममित संबंध नहीं है।

प्रश्न 16. मान लीजिए कि समुच्चय N में, $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।

(a) $(2, 4) \in R$ $\qquad$ (b) $(3, 8) \in R$

(c) $(6, 8) \in R$ $\qquad$ (d) $(8, 7) \in R$

हल (c) दिया है, $\quad N =$ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

तथा $\quad R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$

चूँकि $b > 6$ है अतः $(2, 4) \notin R$ पुनः $3 \neq 8 - 2$ अतः $(3, 8) \notin R$ तथा $8 \neq 7 - 2$

अतः $(8, 7) \notin R$ लेकिन $6 = 8 - 2, 8 > 6$ अतः $(6, 8) \in R$

प्रश्नावली 1.2

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R_* \to R_*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ R_* सभी ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत R_* को N से बदल दिया जाए, जबकि सहप्रांत पूर्ववत् R_* ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

हल दिया गया फलन $f : R_* \to R_*$ में, $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in R_*$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R_*$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी फलन है। चूँकि प्रत्येक $y \in R_*$ के लिए $x = \frac{1}{y} \in R_*$

इस प्रकार है कि $$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y$$

अतः f आच्छादक फलन है।

$\therefore$ फलन f एकैकी आच्छादक फलन है।

पुनः मान लीजिए $g : N \to R_*$ में, $g(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in N$

द्वारा परिभाषित फलन है। मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$$

$\therefore g$ एकैकी फलन है। अब, चूँकि $12 \in R_*$ के लिए N में कोई अवयव $x \in N$

इस प्रकार नहीं है कि $$g(x) = \frac{1}{12}$$

अतः g एकैकी फलन है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादी (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए।

(i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : N \to N$ फलन है।

(ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : Z \to Z$ फलन है।

(iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : R \to R$ फलन है।

(iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : N \to N$ फलन है।

(v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : Z \to Z$ फलन है।

हल (i) फलन $f : N \to N$ में, $f(x) = x^2, \forall x \in N$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow \quad x = y$$ ($\because x$ तथा y दोनों धनात्मक हैं)

$\therefore f$ एकैकी फलन है। अब, चूँकि $2 \in N$ के लिए N में कोई $x \in N$ इस प्रकार नहीं है कि

$f(x) = 2,$

जैसे– $x^2 = 2$।

अत: f आच्छादक नहीं है। अत: f एकैकी फलन है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

(ii) फलन $f : Z \to Z$ में,

$$f(x) = x^2, \forall x \in Z$$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(-1) = f(1) = 1$ लेकिन $-1 \neq 1$। अत: Z एकैकी फलन नहीं है।

अब, पुन: $-2 \in Z$ के लिए Z में कोई $x \in Z$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -2$, अर्थात् $x^2 = -2$ अत: f आच्छादक फलन नहीं है।

इसलिए f न तो एकैकी फलन है और न ही आच्छादक फलन है।

(iii) फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = x^2, \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(-1) = f(1) = 1$ लेकिन $-1 \neq 1$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $-2 \in R$ के लिए, R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -2$, अर्थात् $x^2 = -2$ अत: f आच्छादक फलन नहीं है। इसलिए f न तो एकैकी फलन है न ही आच्छादक फलन है।

(iv) फलन $f : N \to N$ में, $f(x) = x^3, \forall x \in N$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

पुन: $2 \in N$ के लिए, N में कोई $x \in N$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 2$ अर्थात् $x^3 = 2$ अत: f आच्छादक फलन नहीं है। इसलिए फलन f एकैकी फलन है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

(v) फलन $f : Z \to Z$ में, $f(x) = x^3, \forall x \in Z$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

पुन: $2 \in Z$ के लिए Z में कोई $x \in Z$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 2 \Rightarrow x^3 = 2$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है। अत: फलन f एकैकी है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

हल फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = [x], \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक फलन है।

चूँकि $f(1.2) = [1.2] = 1$

$f(1.9) = [1.9] = 1$

$\therefore$ $f(1.2) = f(1.9) = 1$ लेकिन $1.2 \neq 1.2$

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $0.7 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 0.7$ अर्थात् $[x] = 0.7$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

अत: महत्तम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है न ही आच्छादक है।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $|x|$ बराबर x, यदि x धन या शून्य है तथा $|x|$ बराबर $-x$, यदि x ऋण है।

हल फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = |x|, \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(-1) = f(1) = 1$ लेकिन $-1 \neq 1$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $-1 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -1$ अर्थात् $|x| = -1$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

अत: मापांक फलन न तो एकैकी और न ही आच्छादक है।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$ द्वारा प्रदत्त चिन्ह फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

हल फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(1) = f(2) = 1$ लेकिन $1 \neq 2$ है।

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है। चूँकि f के परिसर में केवल तीन अवयव $-1, 0, 1$ हैं।

अत: $2 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 2$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

$\therefore f$ न तो एकैकी न ही आच्छादक फलन है।

प्रश्न 6. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$

तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ $\therefore$ $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$

चूँकि फलन f द्वारा भिन्न-भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भिन्न हैं। अत: f एकैकी फलन है।

प्रश्न 7. निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बताइए कि क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $f(x) = 3 - 4x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \rightarrow R$ है।

(ii) $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \rightarrow R$ है।

हल (i) फलन $f : R \rightarrow R$ में, $f(x) = 3 - 4x, \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y)$$

$\Rightarrow$ $\quad 3 - 4x = 3 - 4y \Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

पुनः प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए $x = \dfrac{3-y}{4} \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{3-y}{4}\right) = 3 - 4\left(\frac{3-y}{4}\right) = y$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

(ii) फलन $f : R \rightarrow R$ में, $f(x) = 1 + x^2, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y)$$

$\Rightarrow$ $\quad 1 + x^2 = 1 + y^2$

$\Rightarrow$ $\quad x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

जैसे $\quad f(1) = f(-1) = 2 \therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

पुनः $-2 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -2$

अर्थात् $\quad 1 + x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = -3$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

$\therefore f$ न तो एकैकी न ही आच्छादक फलन है।

प्रश्न 8. मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि $f : A \times B \rightarrow B \times A$, इस प्रकार कि $f(a, b) = (b, a)$ एक एकैकी आच्छादी (bijective) फलन है।

हल $f : A \times B \rightarrow B \times A$ में, $f(a, b) = (b, a), \forall (a, b) \in A \times B$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $\quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$

इस प्रकार है कि $\quad f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2) \Rightarrow (b_1, a_1) = (b_2, a_2)$

$\Rightarrow$ $\quad b_1 = b_2$ तथा $a_1 = a_2$

$\Rightarrow$ $\quad (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \therefore f$ एकैकी फलन है।

पुनः प्रत्येक $(a, b) \in A \times B$ के लिए $A \times B$ में (b, a) इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(b, a) = (a, b) \quad \therefore f \text{ आच्छादक फलन है।}$$

अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 9. मान लीजिए कि समस्त $n \in N$ के लिए,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ संख्या विषम है।} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ संख्या सम है।} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक फलन $f: N \to N$ है। बताइए कि क्या फलन f एकैकी आच्छादी (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल फलन $f: N \to N$ में, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है।} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है।} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $\qquad f(1) = \dfrac{1+1}{2} = 1$

तथा $\qquad f(2) = \dfrac{2}{2} = 1 \quad \therefore f(1) = f(2) = 1$ लेकिन $1 \neq 2$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

मान लीजिए $n \in N$

दशा I जब n विषम हो।

अतः $\qquad n = 2r + 1, r \in N$

तब, $4r + 1 \in N$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(4r+1) = \frac{4r+1+1}{2} = 2r + 1$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है।

दशा II जब n सम हो, तो $n = 2r$ तो $4r \in N$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(4r) = \frac{4r}{2} = 2r$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है।

अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 10. मान लीजिए कि $A = R - \{3\}$ तथा $B = R - \{1\}$ है। $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f: A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल दिया है, $\qquad A = R - \{3\}$

तथा $\qquad B = R - \{1\}$

अब, $f: A \to B$ में, $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in A$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{y-2}{y-3} \Rightarrow (x-2)(y-3) = (y-2)(x-3)$

$\Rightarrow \quad xy - 3x - 2y + 6 = xy - 3y - 2x + 6$

$\Rightarrow \quad -3x - 2y = -3y - 2x \Rightarrow 3x - 2x = 3y - 2y$

$\Rightarrow \quad x = y$

$\therefore$ f एकैकी फलन है।

मान लीजिए $\quad y \in B = R - \{1\} \;\therefore\; y \neq -1$

तब, f आच्छादक फलन होगा, यदि $x \in A$ इस प्रकार विद्यमान हो कि $f(x) = y$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x-3} = y \Rightarrow x - 2 = xy - 3y$$

$\Rightarrow \quad x(1 - y) = -3y + 2$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2-3y}{1-y} \in A \qquad (y \neq 1)$$

अत: प्रत्येक $y \in B$ के लिए $\quad x = \frac{2-3y}{1-y} \in A$

इस प्रकार है कि
$$f(x) = f\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 2}{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 3} = \frac{2-3y-2+2y}{2-3y-3+3y} = \frac{-y}{-1} = y$$

$\therefore$ f आच्छादक फलन है। अत: f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 11. मान लीजिए कि $f: R \to R, f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।

(a) f एकैकी आच्छादक है। (b) f बहुएक आच्छादक है।

(c) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है। (d) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

हल फलन $f: R \to R$ में, $f(x) = x^4, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^4 = y^4 \Rightarrow x = \pm y$$

जैसे– $f(1) = f(-1) = 1$ लेकिन $1 \neq -1$

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $2 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$

इस प्रकार नहीं कि $f(x) = 2$ अर्थात् $x^4 = 2$

$\therefore$ f आच्छादक फलन नहीं है।

अत: f न तो एकैकी न ही आच्छादक फलन है।

प्रश्न 12. मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \to R$ है। सही उत्तर चुनिए

(a) f एकैकी आच्छादक है। (b) f बहुएक आच्छादक है।

(c) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है। (d) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

हल फलन $f: R \to R$ में, $f(x) = 3x, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y \quad \therefore f \text{ एकैकी फलन है।}$$

पुन: प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए, $x = \frac{y}{3} \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{3}\right) = 3\left(\frac{y}{3}\right) = y$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अत: f एकैकी आच्छादक फलन है।

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $f: R \to \{x \in R : -1 < x < 1\}$, जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

हल दिया गया फलन $f: R \to \{x \in R: -1 < x < 1\}$

$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $\qquad f(x) = f(y), x, y \in R \Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$

अब, यदि x-धनात्मक तथा y-ऋणात्मक हो, तो $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow 2xy = x - y$

चूँकि x-धनात्मक तथा y-ऋणात्मक है।

$\therefore \qquad x > y \Rightarrow x - y > 0$

लेकिन $2xy$ ऋणात्मक है।

$\therefore \qquad 2xy \neq x - y$

अत: x-धनात्मक तथा y-ऋणात्मक को छोड़ा जा सकता है। इसी प्रकार, x-ऋणात्मक तथा y-धनात्मक को भी छोड़ा जा सकता है।

अब, जब x तथा y दोनों धनात्मक हों, तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$$

जब x तथा y दोनों ऋणात्मक हों, तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y - yx \Rightarrow x = y$$

अत: f एकैकी फलन है।

अब, मान लीजिए $y \in R$ इस प्रकार है कि $gof(x) = g(f(x)) = g(x) = |x|$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$(gof)(x) = (gof)(y) \Rightarrow |x| = |y|$$

चूँकि $x, y \in N$, दोनों धनात्मक हैं।

$$\therefore \quad |x| = |y| \Rightarrow x = y$$

अतः gof एकैकी फलन है।

यदि y धनात्मक हो, तो R में एक अवयव $x = \frac{y}{1-y}$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि

$$f(x) = \frac{y}{1-y} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}} = \frac{y}{1-y+y} = y$$

$\therefore$ फलन f आच्छादक फलन है।

अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$ एकैक (injective) है।

हल दिया गया फलन $f : R \to R$, $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन है। $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in R \Rightarrow x^3 = y^3$

$\Rightarrow x = y$, जोकि हमेशा सत्य नहीं है।

अतः पुनः मान लीजिए $x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

अतः f एकैकी फलन है।

प्रश्न 3. समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या $1, 2, 3, \ldots, n$ के कुल क्रमचयों की संख्या के बराबर होती है। अर्थात् $^nP_n = n!$)

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x) = |x|$$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$(gof)(x) = (gof)(y) \quad \Rightarrow \quad |x| = |y|$$

चूँकि $x, y \in N$, दोनों धनात्मक हैं।

$\therefore \qquad |x| = |y| \Rightarrow x = y$

अतः gof एकैकी फलन है।

प्रश्न 15. मान लीजिए कि $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ और $f, g : A \to B$ क्रमशः $f(x) = x^2 - x, x \in A$ और $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या f तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए

हल दिया है, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$

तथा $B = \{-4, -2, 0, 2\}$

अब, $f, g : A \to B$ क्रमशः $f(x) = x^2 - x, x \in A$

तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$

द्वारा परिभाषित फलन हैं।

चूँकि $f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$

तथा $g(-1) = 2\left|(-1) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow f(-1) = g(-1)$

पुनः $f(0) = (0)^2 - 0 = 0$

तथा $g(0) = 2\left|0 - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $f(0) = g(0)$

पुनः $f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

तथा $g(1) = 2\left|1 - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = g(1)$

पुनः $f(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

तथा $g(2) = 2\left|2 - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = g(2)$

$\therefore$ $f(a) = g(a), \forall a \in A$ अतः f तथा g समान हैं।

प्रश्न 16. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो, तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव $(1, 2)$ तथा $(1, 3)$ हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रमक नहीं हैं, की संख्या है

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

हल (a) चूँकि संबंध R स्वतुल्य है।

अतः $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$

पुनः चूँकि संबंध R सममित है। अतः $(1, 2), (2, 1) \in R$ तथा $(1, 3), (3, 1) \in R$
लेकिन संबंध R संक्रमक नहीं है। अतः $(3, 1), (1, 2) \in R$ लेकिन $(3, 2) \notin R$
अब यदि हम $(3, 2)$ तथा $(2, 3)$ में से कोई भी अवयव R में लेते हैं। तो R संक्रमक हो जाता है।
अतः अभीष्ट संबंधों की संख्या एक है।

प्रश्न 17. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो, तो अवयव $(1, 2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

हल (b) दिया गया है कि $A = \{1, 2, 3\}$
एक तुल्यता संबंध, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक होता है।
$(1, 2)$ को समाहित करने वाला सबसे छोटा संबंध

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

है जिसमें केवल चार अवयव $(2, 3), (3, 2), (1, 3)$ तथा $(3, 1)$ नहीं हैं।

अब, यदि $(2, 3) \in R_1$ हो, तो सममित संबंध के लिए $(3, 2) \in R_1$ भी होगा। पुनः संक्रमक संबंध के लिए $(1, 3)$ तथा $(3, 1)$ भी R_1 में होंगे। अतः R_1 से बड़ा संबंध केवल सार्वत्रिक संबंध होगा। अतः $(1, 2)$ को समाहित करने वाले तुल्यता संबंधों की संख्या केवल दो है।